Методы дискретной оптимизации

Задача о максимальном потоке в сети.
Алгоритм пометок Форда-Фалкерсона

Основные понятия

Определение.

Потоковая сеть – набор $G = (V, E, c, s, t)$, где (V, E) – орграф, c – вектор пропускных способностей дуг, $|c| = |E|$, вершины s,t – исток и сток соответственно. Степень захода вершины s равна 0, степень исхода вершины t равна 0.

Система обозначений:

$$u_+ = \{v \in V | (u, v) \in E\}$$

$$u_- = \{v \in V | (v, u) \in E\}$$

f – поток в G, т.е. вектор, $|f| = |E|$, для которого выполнены условия

1. $f(e) \in [0, c(e)], e \in E$
2. $f(u_+) = f(u_-), \forall u \in V \backslash \{s, t\}$, т.е. $f(u_+) = \sum_{v \in u_+} f(u, v) = \sum_{v \in u_-} f(v, u) = f(u_-)$

Условие 1) – ограничение на величину потока по каждой дуге, т.е. величина потока по каждой из дуг $e \in E$ не может превосходить пропускной способности этой дуги $c(e)$. Условие 2) – условие неразрывности потока в каждой вершине: выходящий из вершины u поток $f(u_+)$ совпадает с потоком $f(u_-)$, входящим в u.

Задача поиска максимального потока

$||f|| = f(s_+)$ – величина потока в сети.

Задача: Найти поток f максимальной величины при условиях 1), 2). В терминах задачи линейного программирования задача формулируется следующим образом. Пусть $|V| = n$, $|E| = m$, $v_1 = s$, $v_n = t$, матрица инцидентности $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = +1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E$; $a_{ij} = -1 \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in E$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$. В других случаях элемент матрицы A равен 0. Элементы матрицы A не касаются вершин s, t, в частности, это означает, что строки матрицы суть a_i, $i = 2, \ldots, n-1$. Строка a_1 участвует в целевой функции полученной задачи

$$(a_1, f) \to \max, \quad Af = 0, \quad 0 \leq f \leq c$$

Последнее условие задачи означает существование ее решения f^* в силу ограниченности множества допустимых точек в линейной задачи оптимизации.

Задача поиска максимального потока

Определение.

Разбиение (V_s, V_t) множества вершин $V : V = V_s \cup V_t, V_s \cap V_t = \emptyset$, $s \in V_s, t \in V_t$ называется (s,t)-разрезом сети G.

Для (s,t)-разреза множество дуг идущих из V_s в V_t обозначим как

$$E(V_s \to V_t) = \{e | e = (u, v) \in E, u \in V_s, v \in V_t\}$$

Величину потока, идущего из из V_s в V_t, обозначим как

$$f(V_s \to V_t) = \sum_{e \in E(V_s \to V_t)} f(e).$$

Аналогично множество дуг, идущих из V_t в V_s, обозначим через

$$E(V_t \to V_s) = \{e | e = (v, u) \in E, v \in V_t, u \in V_s\},$$

а величину потока, переходящего из t в s, обозначим как

$$f(V_t \to V_s) = \sum_{e \in E(V_t \to V_s)} f(e).$$

Задача поиска максимального потока

Лемма 1.

$||f|| = f(V_s \to V_t) - f(V_t \to V_s)$

Доказательство. Из равенств $f(v_+) - f(v_-) = 0$, $f(s_+) = ||f||$ следует соотношение $\sum_{v \in V_s} f(v_+) - \sum_{v \in V_s} f(v_-) = ||f||$. В полученном равенстве слагаемые, соответствующие ребрам вида (u, v), где $u, v \in V_s$, взаимно уничтожаются, остаются лишь слагаемые, соответствующие ребрам с концами из разных множеств V_s, V_t.

Определение.

Пропускной способностью (s,t)-разреза называется величина

$$c(V_s, V_t) = \sum_{e \in E(V_s \to V_t)} c(e).$$

По определению $0 \leq f(V_s \to V_t) \leq c(V_s, V_t) \Rightarrow ||f|| \leq c(V_s, V_t)$.

Следствие. Если для некоторого потока f его величина совпадает с пропускной способностью некоторого разреза, то указанный поток является потоком максимальной величины, а найденный разрез является разрезом минимальной пропускной способности.

Задача поиска максимального потока

Определение.

Цепь из вершины u в вершину v – последовательность $P = \{u = v_0, v_1, \ldots, v_n = v\}$, для каждой пары соседних вершин (v_k, v_{k+1}), $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ которой либо $(v_k, v_{k+1}) \in E$, либо $(v_{k+1}, v_k) \in E$. В первом случае дуга (v_k, v_{k+1}) – прямая дуга для цепи, во втором случае – обратная.

Для цепи P из u в v величины

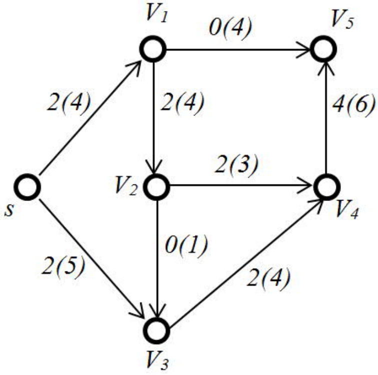
$$\Delta(y) = \begin{cases} c(e) - f(e), e - \text{прямая дуга,} \\ f(e), e - \text{обратная дуга} \end{cases} \quad \delta(P) = \min_{e \in P} \Delta(e).$$

Определение.

Цепь P увеличивает поток f, если $\delta(P) > 0$.

Пример

В примере на Рис. 1 цепь $P = \{s, v_3, v_4, v_2, v_1, v_5\}$,
$\delta(P) = \min(3, 2, 2, 2, 4) = 2 > 0$.



Задача поиска максимального потока

Теорема 1.

Если f – поток в G, а (s, t)-цепь P увеличивает f, то существует поток f_1 такой, что $||f_1|| = ||f|| + \delta(P)$.

Доказательство. Построим поток f_1, положив

$$f_1(e) = \begin{cases} f(e) + \delta(P), e - \text{прямая дуга}, \\ f(e) - \delta(P), e - \text{обратная дуга}, \\ f(e), e - \text{не элемент цепи } P. \end{cases}$$

Для построенного потока условие ограничения на пропускную способность выполнено. Далее рассмотрим произвольную вершину v, для нее возможны ситуации:

1. В данную вершину входит прямая дуга e_1 и выходит прямая дуга e_2. Тогда для обеих дуг величина потока увеличится на $\delta(P)$, что означает сохранение условия неразрывности потока.
2. В вершину v входит прямая дуга e_k и входит обратная дуга e_{k+1}. Тогда величина потока для обеих дуг уменьшится на $\delta(P)$, что также означает сохранение условия неразрывности.

Задача поиска максимального потока

Теорема 2.

Для потока f в сети G следующие условия эквивалентны:

1. f – максимален.
2. Не существует увеличивающей (s, t)-цепи.
3. Существует разрез (V_s, V_t), для которого $||f|| = c(V_s, V_t)$.

Доказательство. Импликация $1 \Rightarrow 2$ следует из теоремы 1. Импликация $3 \Rightarrow 1$ следует из леммы 1. Покажем справедливость импликации $2 \Rightarrow 3$. Обозначим $V_s^1 = \{v \in V | \exists (s, v)$-цепь P,для которой $\delta(P) > 0\}$, $V_s = V_s^1 \cup \{s\}$, $V_t = V \backslash V_s$. Покажем: $||f|| = c(V_s, V_t)$. Рассмотрим дугу

$$e = (u, v), u \in V_s, v \in V_t \Rightarrow f(e) = c(e),$$

поскольку в противном случае множество V_s может быть дополнено вершиной v. Из этого следует $f(V_s \to V_t) = c(V_s, V_t)$. Аналогично если дуга

$$e = (u, v), u \in V_t, v \in V_s \Rightarrow f(e) = 0,$$

откуда $f(V_t \to V_s) = 0$. Следовательно, $||f|| = f(V_s \to V_t)$, что доказывает теорему.

Решение задачи о максимальном потоке

Алгоритм пометок Форда-Фалкерсона

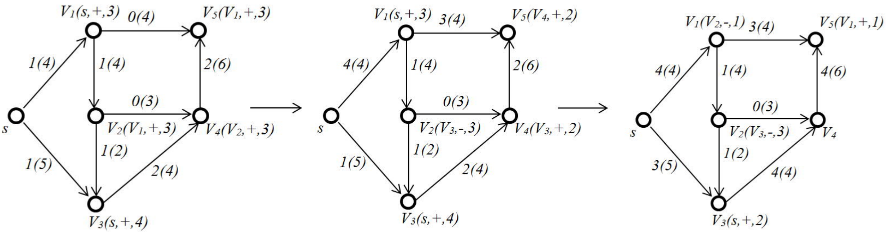
Вершины разбиваются на 3 категории: непомеченные, помеченные и просмотренные. На начальном шаге помечается исток s, остальные вершины непомечены.

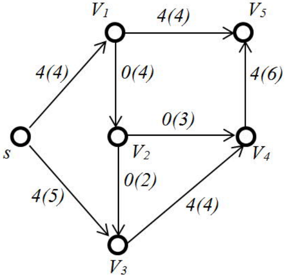
Определение метки вершины: тройка $(k, \pm, \Delta)$, где

- k – номер той смежной вершины, из которой данная вершина помечается,
- $\pm$ – указатель на то, прямая (+) или обратная (-) дуга ведет в вершину из смежной к ней в процессе расстановки пометок,
- Δ – величина потока, на который можно увеличить входящий в вершину поток.

Процесс распространения пометок заключается в том, что из вершины, откуда идут пометки, на начальном шаге это s, распространяются пометки по всем дугам, как выходящим из данной вершины, так и входящим в нее, для каждой дуги изменяя поток по ней. После перебора всех дуг инцидентных с данной вершиной она переходит в разряд просмотренных. Далее просмотр и расстановка пометок идет из следующих помеченных вершин. Пример работы алгоритма на рис. 2.

Пример


$V_1(s,+,3)$
$0(4)$
$V_5(V_1,+,3)$
$1(4)$
$1(4)$
$2(6)$
$0(3)$
s
$V_2(V_1,+,3)$
$V_4(V_2,+,3)$
$1(2)$
$1(5)$
$2(4)$
$V_3(s,+,4)$
$V_1(s,+,3)$
$3(4)$
$V_5(V_4,+,2)$
$4(4)$
$1(4)$
$2(6)$
$0(3)$
s
$V_2(V_3,-,3)$
$V_4(V_3,+,2)$
$1(2)$
$1(5)$
$2(4)$
$V_3(s,+,4)$
$V_1(V_2,-,1)$
$3(4)$
$V_5(V_1,+,1)$
$4(4)$
$1(4)$
$4(6)$
$0(3)$
s
$V_2(V_3,-,3)$
V_4
$1(2)$
$3(5)$
$4(4)$
$V_3(s,+,2)$


V_1
$4(4)$
V_5
$4(4)$
$0(4)$
$4(6)$
$0(3)$
s
V_2
V_4
$0(2)$
$4(5)$
$4(4)$
V_3